Adı Soyadı:

Numarası: **05.07.2022**

DİFERANSİYEL DENKLEMLER-II BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

NOT: Sadece 4 soru cevaplandırınız.

1. $y = c_1 + c_2 x + c_3 \ln x + c_4 e^{-x} + x^2$ çözümünü genel çözüm kabul eden diferansiyel denklemi sınıflandırınız (en az 3 özellik yazınız).

2. $y^{(6)} - 3y^{(4)} + 3y'' - y = e^{2x}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3. $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 1$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

4. $y^{(4)} + 2y''' + 10y'' = x - 1$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

5. $y'' + y' - 2y = e^{-x}$ denkleminin $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ koşullarını sağlayan çözümünü bulunuz.

6. $xy'' - y' = x^2$ denklemi için aşağıdakilerden doğru olanı (olanları) belirtip, bir kaç cümle ile açıklayınız.

a) $u = u(x)$ olmak üzere $y' = u$ dönüşümü ile denklemin mertebesi düşürülebilir.

b) Genel çözüm $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + x^3$ formundadır.

c) $y_1(x) = x^2$ homojen kısmın bir çözümüdür.

Doç. Dr. Fatma HIRA

① $y = \underbrace{c_1 + c_2 x + c_3 \ln x + c_4 e^{-x}}_{y_h} + \underbrace{x^2}_{y_ö}$

y_h içinde 4 tane birbirinden bağımsız keyfi sabit olduğundan 4. mertebeden denklemdir. Çözümlerden biri $\ln x$ olduğundan değişken katsayılı denklemdir (sabit katsayılarda üstel, polinom veya sin ve cos geliyor sadece) ve $y_ö$ çözümü olduğundan homojen olmayan dif denktir. Yani dif denk 4. mertebeli, değişken katsayılı, homojen olmayan denklemdir.

② $y^{(6)} - 3y^{(4)} + 3y'' - y = e^{2x}$ 6. mertebeli sabit katsayılı homojen olmayan denklem

$y^{(6)} - 3y^{(4)} + 3y'' - y = 0$

$\lambda^6 - 3\lambda^4 + 3\lambda^2 - 1 = 0$

$(\lambda^2 - 1)^3 = 0$

$(\lambda - 1)^3 \cdot (\lambda + 1)^3 = 0$

$\lambda = 1$ 3 tane, $\lambda = -1$ 3 tane $\rightarrow y_4 = e^{-x}$, $y_5 = x e^{-x}$

$y_h = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{x} + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) e^{-x}$ olur

$y_ö = \dfrac{1}{(D^2 - 1)^3} e^{2x} \underset{D \to 2}{a = 2} = \dfrac{1}{(2^2 - 1)^3} e^{2x} = \dfrac{1}{27} e^{2x}$

$y = y_h + y_ö$

$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{x} + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) e^{-x} + \dfrac{1}{27} e^{2x}$

③ $x^2y'' - 4xy' + 6y = 1$ Cauchy Euler denklemidir. $x = e^t$ dönüşümü yapılınca $D = \frac{dy}{dt}$ olsun

$$(D(D-1) - 4D + 6)y = 1$$

$$(D^2 - 5D + 6)y = 1 \longrightarrow \text{özel çözüm için}$$

sabit katsayılı denklem elde edilir.

$$y_ö = \frac{1}{D^2-5D+6} 1 = \frac{1}{D^2-5D+6} e^{0x} \quad a=0,\ D \to 0$$

$$= \frac{1}{6} e^{0x} = \frac{1}{6}$$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$-3 \quad -2$

$\lambda = 3 \quad \lambda = 2$

$y_1 = e^{3t} \quad y_2 = e^{2t}$

$y_h = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$ olur.

$y_h = c_1 x^3 + c_2 x^2$

veya $y_ö = A$ olarak ararsa

$6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6} \Rightarrow y_ö = \frac{1}{6}$

$$y = y_h + y_ö = c_1 x^3 + c_2 x^2 + \frac{1}{6}$$

Anahtar

④ $y^{(4)} + 2y''' + 10y'' = x - 1$

$y^{(4)} + 2y''' + 10y'' = 0$

$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 10\lambda^2 = 0$

$\lambda^2(\lambda^2 + 2\lambda + 10) = 0$

$\Delta = 4 - 4.1.10 = -36 < 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \qquad \lambda_{3,4} = \frac{-2 \mp 6i}{2} = -1 \mp 3i$

$\alpha = -1,\ \beta = 3$

$y_1 = e^{0x} = 1$

$y_2 = x e^{0x} = x$

$y_3 = e^{-x}\cos 3x$

$y_4 = e^{-x}\sin 3x$

$$y_h = c_1 + c_2 x + e^{-x}(c_3\cos 3x + c_4 \sin 3x)$$

$y_ö$ belirsiz katsayılar yöntemi ile ararsa

$B(x) = x - 1 \rightarrow y_ö = Ax + B$

$\{x, 1\}$ bunlar y_h da var olduğundan

$y_ö = Ax^3 + Bx^2$ olarak aranmalıdır.

$y_ö' = 3Ax^2 + 2Bx$

$y_ö'' = 6Ax + 2B$

$y_ö''' = 6A$

$y_ö^{(4)} = 0$

$0 + 12A + 60Ax + 20B = x - 1$

$60A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{60}$

$12A + 20B = -1 \Rightarrow B = -\frac{3}{50}$

$$y_ö = \frac{1}{60}x^3 - \frac{3}{50}x^2$$

genel çözüm

$$y = y_h + y_ö = c_1 + c_2 x + e^{-x}(c_3\cos 3x + c_4 \sin 3x) + \frac{x^3}{60} - \frac{3x^2}{50}$$

(5) $y'' + y' - 2y = e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

$y'' + y' - 2y = 0$ $\quad y_ö = \frac{1}{D^2 + D - 2} e^{-x} = \frac{1}{1-1-2} e^{-x} = -\frac{1}{2} e^{-x}$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ $\quad a = -1$, $D \to -1$

$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 1$ $\quad y = y_h + y_ö = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} - \frac{1}{2} e^{-x}$ genel çözüm

$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 - \frac{1}{2} = 0$
$y'(0) = 0 \Rightarrow -2c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 0$
$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{3}$, $c_2 = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow y = \frac{1}{3} e^{-2x} + \frac{1}{6} e^{x} - \frac{1}{2} e^{-x}$

Veya Laplace dönüşümü ile çözüm bulunursa $L(y(x)) = Y(s)$ olsun
$L(e^{ax}) = \frac{1}{s-a}$

$L(y'') + L(y') - 2L(y) = L(e^{-x})$

$s^2 Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{0} + sY(s) - \underbrace{y(0)}_{0} - 2Y(s) = \frac{1}{s+1}$

$(s^2 + s - 2) Y(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s-2)} = \frac{1}{(s+1)(s-1)(s+2)}$

$Y(s) = -\frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{6} \frac{1}{s-1}$

$y(x) = L^{-1}(Y(s)) = -\frac{1}{2} L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{1}{3} L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) + \frac{1}{6} L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)$

$y(x) = -\frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{3} e^{-2x} + \frac{1}{6} e^{x}$ bulunur.

(6) $xy'' - y' = x^2$ 2. mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan denklem

a) $y' = u \Rightarrow y'' = u' \Rightarrow xu' - u = x^2 \Rightarrow$ 1. mertebeden denkleme indirgenir. Doğrudur.

b) Genel çözüm $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_ö$ formunda olmalıdır. Verilere göre $y_ö = x^3$ özel çözüm müdür bunu kontrol edersek yani

$xy_ö'' - y_ö' = x^2$ sağlanır mı? $y_ö' = 3x^2$, $y_ö'' = 6x$

$x.6x - 3x^2 = 3x^2 \neq x^2$ olduğu $y_ö = x^3$ özel çözüm değildir. Yanlış

c) $y_1 = x^2$ homojen kısmın çözümü ise $xy_1'' - y_1' = 0$ olmalıdır.

$y_1' = 2x$ $\Rightarrow$ $x.2 - 2x = 0 = 0$ sağlanır. O halde $y_1 = x^2$ bir

$y_1'' = 2$ özel çözümdür. Doğrudur.